DR. MANFRED HECKL
Ord. Professor

1 BERLIN 20, 28. Jan. 1978
Kronprinzenstraße 41/43
Telefon 030-3752916

EINGEGANGEN
- 1. ...
Erl. ....

Herrn
J. W. Manger
Postfach 4
8725 Arnstein

Sehr geehrter Herr Manger!

Um mein schlechtes Gewissen etwas zu beruhigen, habe ich letztes Wochenende Ihre Lautsprecher theoretisch etwas durchleuchtet. Zu meiner Überraschung stellte sich dabei heraus, daß das von Ihnen gewählte Abstrahlprinzip zumindest in der von mir untersuchten Idealisierung eine zu jedem Zeitpunkt dem Strom entsprechende Abstrahlung ergibt; d. h. daß Einschwingvorgänge und ähnliche störende Effekte nicht auftreten. Wenn ich die Gleichungen richtig deute, so erscheint es denkbar, daß eine Platte (Membran), deren Steife von innen nach außen allmählich abnimmt (Dickenänderung), zu einem etwas besseren Wirkungsgrad führt.

Mit bestem Dank für Ihre Weihnachtsüberraschung,

Ihr

M. Heckl

DR. MANFRED HECKL
Ord. Professor

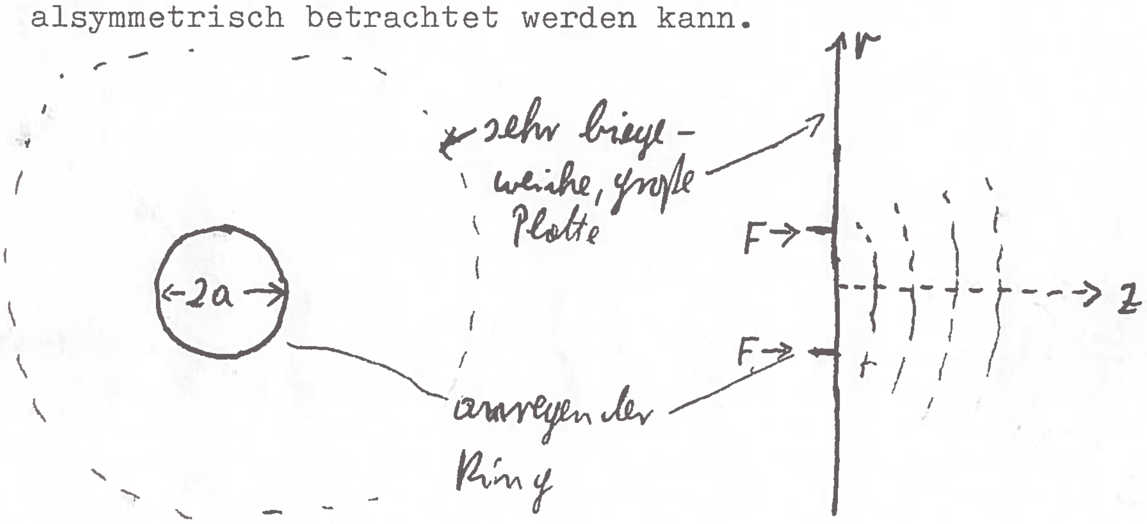
1 BERLIN 20
Kronprinzenstraße 41/43
Telefon 030-3752916

28. Jan. 1978

Abstrahlung von einer ringförmig angeregten, sehr biegeweichen, großen Platte.

1. Problemstellung

Gegeben sei eine sehr große Platte, die entlang eines Ringes angeregt wird. Die wirkende Kraft soll auf dem ganzen Ring konstant sein, sodaß das Problem als radialsymmetrisch betrachtet werden kann.



Gesucht ist die Schallabstrahlung von einer solchen Anordnung, wobei insbesondere der Zeitverlauf des Schalldrucks interessiert.

2. Rechenmodell

Um den mathematischen Aufwand nicht allzu groß werden zu lassen, werden bei der Rechnung folgende Annahmen gemacht:

a) Die Platte ist so groß und so stark gedämpft, daß die vom anregenden Ring erzeugten Biegewellen von einer eventuell vorhandenen äußeren Berandung nicht nennenswert reflektiert werden. (Wegen der höhe~~re~~n Dämpfung des Materials dürfte diese Voraussetzung zumindest oberhalb von einigen Hundert Hertz erfüllt sein.)

b) Auf der Platte kann der Bewegungsverlauf durch die Biegewellengleichung beschrieben werden; d. h. es dürfen keine Membranspannungen(, die zu Nichtlinearitäten führen würden,) vorhanden sein. (Bei der vorliegenden Konstruktion dürfte diese Voraussetzung erfüllt sein.)

c) Die Biegewellenlänge der Platte soll bis mindestens 25 kHz kleiner sein als die Luftwellenlänge. (Da das Material sehr weich ist, kann damit gerechnet werden, daß die Biegewellenlänge sogar bis ca. 50 kHz kleiner als die Luftwellenlänge ist.)

d) Im interessierenden Frequenzbereich - also etwa oberhalb 300 Hz - soll die Strahlungsbelasteung durch die umgebende Luft vernachlässigt werden. (Wegen des im Vergleich zu Lautsprechermembranen höheren Gewichts der schwingenden Folie dürfte auch diese Voraussetzung erfüllt sein.)

3. Berechnung des Schalldrucks

3.1. Grundgleichungen

Unter den genannten Voraussetzungen ist das Problem gelöst, wenn es gelingt, die Schallfeldgleichung und die Biegewellengleichung unter Zugrundelegung einer ringförmigen Anregung zu lösen.
Aus der Literatur z. B. Heckl, Acustica 9(1959)S. 371 ist bekannt, daß für den Schalldruck vor einem sehr großen ebenen Strahler im radialsymmetrischen Fall die Formel gilt:

$$p(r,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\int_{0}^{\infty} \check{p}(k_r,\omega)\,J_0(k_r r)\,e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\,z}\,k_r\,dk_r\,d\omega \qquad (1)$$

Dabei bedeuten

$p(r,z,t)$	=	Schalldruck am Ort r,z zur Zeit t
r	=	Abstand vom Mittelpunkt eier Achse, die senkrecht durch den Mittelpunkt des Ringes geht

z	= Abstand von der Plattenebene
t	= Zeit
ω	= Integrationsvariable(Kreisfrequenz)
$J_0(..)$	= Besselfunktion nullter Ordnung
j	= $\sqrt{-1}$
k_r	= Integrationsvariable(Wellenzahl)
k_0	= ω/c_0
c_0	= Schallwellengeschwindigkeit in Luft
$\check{p}(..)$	= Wellenzahlspektrum des Drucks

Falls die Platte mit der radialsymmetrischen Schnelleverteilung v(r,t) schwingt, dann gilt

$$\check{p}(k_r,\omega) = \check{v}(k_r,\omega)\,\frac{\rho_0\,\omega}{\sqrt{k_0^2-k_r^2}} \qquad (2)$$

mit

$$\check{v}(k_r,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} v(r,t)\,J_0(k_r r)\,e^{-j\omega t}\,r\,dr\,dt \qquad (3)$$

Dabei bedeutet:

ρ_0 = Dichte der Luft

Falls die Anregung der Platte mit einer radialen Druckverteilung der Form $p_A(r,t)$ erfolgt, gilt

$$\check{p}(k_r,\omega) = \frac{j\omega\,\check{p}_A(k_r,\omega)}{2\pi B\,(k_r^4-k_B^4)}\;\frac{\omega\,\rho_0}{\sqrt{k_0^2-k_r^2}} \qquad (4)$$

mit

$$\check{p}_A(k_r,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} p_A(r,t)\,J_0(k_r r)\,e^{-j\omega t}\,r\,dr\,dt . \qquad (5)$$

Dabei bedeuten:

B	= Biegesteife der Platte
m''	= Masse pro Flächeneinheit der Platte
k_B	= $\sqrt[4]{\omega^2 m''/B}$ = freie Biegewellenzahl

Im vorliegenden Fall einer ringförmigen Anregung ist

$$p_A(r,t) = \frac{F_0(t)}{2\pi a}\,\delta(r-a) \tag{6}$$

also

$$\check{p}_A(k_r,\omega) = \frac{J_0(k_r a)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_0(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \frac{J_0(k_r a)}{2\pi}\,\check{F}_0(\omega) \tag{7}$$

Setzt man (7) in (4) und das Ergebnis in (1) ein, so folgt

$$p(r,z,t) = \frac{j\rho_0}{4\pi^2 B}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} \frac{\omega^2 J_0(k_r a)\,\check{F}_0(\omega)}{(k_r^4-k_B^4)\sqrt{k_0^2-k_r^2}}\,J_0(k_r r)\,e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\,z}\,e^{j\omega t}\,k_r\,dk_r\,d\omega \tag{8}$$

Wegen der Voraussetzung b) ist im Fernfeld, d. h. für $k_o > k_r$ stets $k_r \ll k_B$, also

$$p(r,z,t) = \frac{j\rho_0}{4\pi^2 m''}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} \frac{\check{F}_0(\omega)}{\sqrt{k_0^2-k_r^2}}\,J_0(k_r a)\,J_0(k_r r)\,e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\,z}\,e^{j\omega t}\,k_r\,dk_r\,d\omega \tag{9}$$

3.2 Auswertung von Gl. (9)

Berechnet man die Abstrahlung von einer kleinen Kolbenmembran nach den obigen Methoden und nach dem üblichen Verfahren, so läßt sich durch Vergleich zeigen, daß

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(k_r a)\,J_0(k_r r)}{\sqrt{k_0^2-k_r^2}}\,e^{-j\sqrt{k_0^2-k_r^2}\,z}\,k_r\,dk_r \approx \frac{-j}{2\sqrt{r^2+z^2}}\,e^{-jk_0\sqrt{r^2+z^2}} \tag{10}$$

Streng genommen gilt diese Formel nur, wenn a kleiner ist als eine halbe Luftwellenlänge; wenn man sich auf der Mittelsenkrechten durch den anregenden Ring befindet, gilt Gl.(10) auch noch für größere Werte von a.

Setzt man (10) in (9) ein, dann ergibt sich

$$p(r,z,t) = \frac{\rho_0}{8\pi^2 m'' \sqrt{r^2+z^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{F}_0(\omega) e^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega}{c_0}\sqrt{r^2+z^2}} d\omega =$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi m'' \sqrt{r^2+z^2}} F_0\left(t - \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{c}\right) . \qquad (11)$$

Dieses überraschend einfache Resultat besagt, daß der Zeitverlauf des Schalldrucks in der Nähe der Mittelsenkrechten genau dem Zeitverlauf der auf die Platte wirkenden Kraft und damit dem Zeitverlauf des auf die Schwingspule wirkenden Stroms entspricht. Die Tatsache, daß in der Luft eine Laufzeitverzögerung erfolgt, kommt im Argument $t-\sqrt{r^2+z^2}/c$ zum Ausdruck.

4. Schlußfolgerung

Unter den oben gemachten vereinfachenden Annahmen läßt sich theoretisch zeigen, daß der Schalldruck, der von einer großen sehr biegeweichen, gedämpften Platte in der Mittelsenkrechten abgestrahlt wird, in seinem Zeitverlauf genau dem Zeitverlauf der wirkenden Kraft in der Spule (, die sehr leicht sein muß,) und damit dem Zeitverlauf des Spulenstromes entspricht. Es werden also auch Zeitverläufe des Stromes,die plötzliche Änderungen beinhalten(Rechteckverlauf), im Schalldruckverlauf richtig wiedergegeben.
Der Verlauf des Schalldrucks bei außermittigen Meßpunkten läßt sich aus den obigen Formeln nur nach langwierigen numerischen Auswertungen bestimmen. Vermutlich hat der allmähliche Abfall der Funktion $J_0(k_r a)$ für größer werdende Argumente ~~vermutlich~~ zur Folge, daß bei kleinen Abständen von der Mittelachse erst die "Ecken im Zeitverlauf abgerundet" werden, und für weiter außermittige Punkte ein ganz anderer Zeitverlauf entsteht.